УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ

В.М. Бобочко , С.С. Костигін

Вивчається одне нелінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке використовується при асимптотичному інтегруванні сингулярно збуреного диференціального рівняння з осциляційною точкою звороту.

A non-linear differential equation of the first order, used in the asymptotic integration of the singular perturbed differential equation with the oscillatory pivot point is under study.

В теорії сингулярно збурених диференціальних рівняннях (СЗДР) з точками звороту важливе місце займають так звані модельні диференціальні рівняння та диференціальні рівняння для визначення регуляризуючих функцій. Так наприклад, при дослідженні СЗДР з алгебраїчною точкою звороту регуляризуюча функція визначається з диференціального рівняння $\varphi'^2(x)\varphi(x)=xa(x)$ при початковій умові $\varphi(0)=0$. Це рівняння використовувалось майже у всіх методах, які дозволяли будувати рівномірну асимптотику розв'язку сингулярно збуреної задачі, включаючи і в точці звороту.

При дослідження СЗДР з осциляційною точкою звороту роль регуляризуючої функції відіграє розв’язок задачі

$$L\varphi(x)\equiv\varphi'^2(x)\left[a^2-\varphi^2(x)\right]=4\left(1-x^2\right)p^2(x),\quad \varphi(0)=0. \tag{1}$$

Тут $p(x)>0$ -- неперервна функція на відрізку $I=[-1;1]$, a -- деяке число (параметр).

Властивість 1. Нехай $\varphi_1(x)$ – розв'язок задачі (1) при $x\in I$. Тоді на цьому відрізку розв'язком задачі (1) буде функція $\varphi_2(x)=-\varphi_1(x)$.

Доведення. Оскільки $\varphi_1(x)$ розв’язок, то $L\varphi_1(x)\equiv 4\left(1-x^2\right)p^2(x)$. Тоді

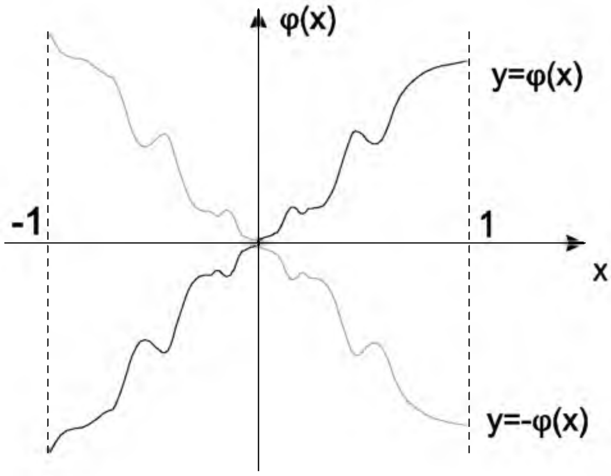
$$L\varphi_2(x)=L(-\varphi_1(x))\equiv\left(-\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2[a^2-(-\varphi(x))^2]\equiv$$

$$\equiv\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2\left[a^2-(\varphi(x))^2\right]\equiv 4\left(1-x^2\right)p^2(x).$$

Властивість 2. Якщо існує хоча б один розв'язок задачі (1), то точка $x=0$ є точкою розгалуження розв'язків задачі (1).

Доведення. Згідно першої властивості, з існування розв'язку $\varphi_1(x)$ рівняння (1) випливає існування розв'язку $\varphi_2(x)=-\varphi_1(x)$. Оскільки $\varphi_1(0)=0$, то $\varphi_2(0)=-\varphi_1(0)=0$. Властивість 2 доведена.

Схематично ці властивість подана на малюнку.



Побудуємо розв'язок $\varphi(x)$ задачі (1) на відрізку I, який буде монотонно зростати при $x \in I$, тобто $\varphi'(x) > 0$ для всіх $x \in I$.

Розв'язання. Параметр a у нас поки що невизначений. Запишемо рівняння (1) у вигляді

$$|\varphi'(x)|\left[a^2-\varphi^2(x)\right]^{\frac{1}{2}} = 2p(x)\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

Оскільки ми будуємо розв'язок у просторі монотонно зростаючих функцій, то $|\varphi'(x)| = \varphi'(x)$, тобто рівняння (2) запишемо у вигляді

$$\varphi'(x)\left[a^2-\varphi^2(x)\right]^{\frac{1}{2}} = 2p(x)(1-x)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3)$$

або

$$\int_0^{\varphi(x)} \left[a^2-\varphi^2(x)\right]^{\frac{1}{2}} d\varphi = \int_0^x 2p(x)\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \qquad (4)$$

Для того, щоб радикал мав дійсні значення, необхідно мати обмеження $-a \le \varphi(x) \le a, \quad a > 0.$

Інтегруючи підінтегральний вираз лівої частини рівності (3) отримаємо рівняння

$$\left[\varphi \cdot a^2-\varphi^2(x)\right]^{\frac{1}{2}} + a^2 \arcsin\frac{\varphi}{a} - f(x) \equiv F(x,\varphi) = 0,$$

де $f(x) \equiv 4\int_0^x \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} p(x)dx.$

Властивість 3. Нехай рівняння (4) визначає неявно функцію $\varphi(x)$ в області $D = \{(x,\varphi), x \in I, -a \le \varphi(x) \le a\}$. Тоді ця функція є розв'язком задачі (1.)

Доведення: Продиференцювавши рівність (4), отримаємо

$$\frac{d\varphi}{dx}\sqrt{a^2-\varphi^2(x)} = 2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} p(x).$$

Зліва та справа маємо невід'ємні вирази. Тому після піднесення до квадрату отримаємо рівняння (1). Оскільки $F(0,0) = 0$, то розв'язок $\varphi(x)$, якщо він існує, задовольняє умові $\varphi(0) = 0$. Властивість 3 доведено.

Нагадаємо, що нам необхідно побудувати монотонно зростаючий розв'язок задачі (1), тобто повинна виконуватися умова $\varphi'(x) > 0$ для всіх $x \in I$.

Для досягнення цієї мети з необхідністю повинна виконуватися умова: $\varphi^2(\pm 1) = a^2$.

Можливі варіанти:

$$\begin{aligned} &1) \quad \varphi(-1) = -a, \quad \varphi(1) = a \\ &2) \quad \varphi(-1) = a, \quad \varphi(1) = -a. \end{aligned} \tag{5}$$

Згідно теореми Ролля інших умов бути не може.

З умови $\varphi'(x) > 0$ потрібно вибрати випадок 1), тобто намагатимемось, щоб рівняння (4) задавало неявно функцію $\varphi(x)$ в області D, причому таку, щоб виконувалась умова (1), яку можна записати у вигляді

$$F(-1,-a) = 0, \quad F(1,a) = 0. \tag{6}$$

Таким чином, займемося безпосередньо доведенням того, що рівняння (4) задає неявно функцію $\varphi = \varphi(x)$ в області D, причому таку, щоб мали місце рівності (6)

Мають місце такі умови.

1) Функція $F(x,\varphi)$, як функція двох змінних, визначена і неперервна у прямокутнику D ;

2) $F(0,0) = 0$; $\quad F'_\varphi(x,y) = 2\sqrt{x^2 - \varphi^2(x)} > 0$ для всіх $x \in (-1;1)$.

Оскільки виконуються умови теореми існування неявної функції, то можна стверджувати, що в деякому околі точки $x = 0,\ x \in (-1,1)$ рівняння (4) задає неявну функцію $\varphi(x)$.

Проте нам цього не досить, оскільки нас цікавить існування неявної функції на відрізку $[-1,1]$, тобто включаючи точки $x = \pm 1$.

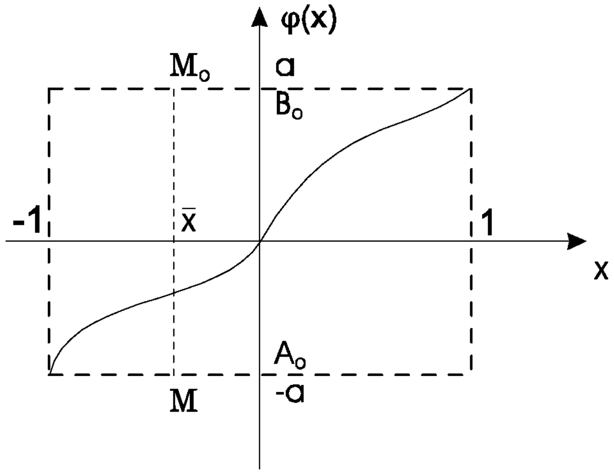
Виходячи з цього, ми проведемо повне доведення існування неявної функції на відрізку I з необхідними нам умовами (6).

Теорема. Нехай

$$a^2 = \frac{8}{\pi}\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} p(x)dx.$$

Тоді рівняння (4) в області I задає неявно функцію $\varphi(x)$, яка задовольняє: 1) умовам (6); 2) $\varphi(0) = 0$; 3) $\varphi(x) \in C[I]$.

Доведення: Схема доведення буде класичною з уточненням в точках $x \pm 1$.



Розглянемо функцію $F(x,\varphi)$ в прямокутнику D, зображеному на малюнку.

Зафіксуємо $x_0 = 0$. Тоді функція $F(0,\varphi)$, як функція однієї змінної буде монотонно зростаючою ($F'_\varphi > 0$) і приймати різні знаки в точках A_0 та B_0, а саме $F(A_0) < 0$, $F(B_0) > 0$.

Зафіксуємо $\varphi = -a$. Маємо $F(-1,-a) = 0, \quad F(1,a) = 0.$

Ці функції неперервні по $x \in I$ та $F(0,-a) < 0$, а $F(0,a) > 0$. Тому існує δ - окіл точки $x = 0$, в якому ці функції зберігають знак.

Основна ідея доведення цієї теореми полягає в тому, щоб визначити довільну до цього часу сталу a таким чином, щоб $\delta = 1$, а при $x = \pm 1$ повинні виконуватись умови (6).

Почнемо з умов (6). Маємо $F(-1,-a) \equiv -\dfrac{2}{\pi}a^2 - f(-1) = 0$, тобто

$$a^2 = -\frac{2}{\pi} f(-1) = \frac{8}{\pi}\int_{-1}^{0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} p(x)dx. \tag{7}$$

З умови $F(1,a) = 0$ отримаємо

$$a^2 = \frac{8}{\pi}\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} p(x)dx. \tag{8}$$

Зрівнюємо праві частини рівностей (7 та (8). Маємо рівність.

$$\frac{8}{\pi}\int_{-1}^{0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} p(x)dx = \frac{8}{\pi}\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} p(x)dx. \tag{9}$$

Якщо $p(x) > 0$ – парна, то має місце рівність (9), а отже ми визначили значення постійної a, яке обраховується за формулами (7) та (8).

Легко перевірити, що для $x \in (-1,1)$ мають місце нерівності

$$F(x,-a) < 0, \quad F(x,a) > 0,$$

де a визначається формулою (8).

Наприклад:

$$F(x,a) \equiv 4\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} p(x)dx - 4\int_{0}^{x}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} p(x)dx > 0$$

для всіх $x \in (-1,1)$.

Після цього, згідно класичної теореми, зафіксуємо $x = \bar{x} \in (-1,1)$ та розглянемо вертикальний відрізок MM_0, з точками $M(\bar{x},-a)$, $M(\bar{x},a)$.

Функція $F(\bar{x},\varphi)$ неперервна по φ для кожного фіксованого $x \in (-1,1)$. Отже, $F(\bar{x},\varphi)$ – монотонно зростаюча на всьому відрізку $[-1,1]$. Оскільки $F(\bar{x},-a) < 0 < F(\bar{x},a)$ для всіх $\bar{x} \in I$, то існує єдине $\varphi = \bar{\varphi}$ таке, що $F(\bar{x},\bar{\varphi}) = 0$. Отже, рівняння (4) при $x \in I$ задає неявну функцію $\varphi(x)$, котра є неперервною на I та задовольняє умовам

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(-1) = -a, \quad \varphi(1) = a.$$

Теорему доведено.

Нас цікавить не тільки питання існування $\varphi(x)$, а і її похідна. Тому необхідно дослідити питання існування $\varphi'(x)$ на відрізку I.

З доведення є очевидним, що існує $\varphi'(x)$ при $x \in (-1,1)$, котра обчислюється згідно формули

$$\varphi'(x) = \frac{-F'_x(x,\varphi(x))}{F'_\varphi(x,\varphi(x))} \equiv \frac{f'(x)}{2\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}} \equiv \frac{4\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} p(x)}{2\left(a^2 - \varphi^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Зауважмо, що $\varphi'(x) > 0$ для всіх $x \in (-1,1)$. Отже, ми маємо неперервну на відрізку I, а відповідно й обмежену, функцію $\varphi(x)$, котра монотонно зростає для $x \in (-1,1)$. Тому для того, щоб існувала неперервна похідна функції $\varphi(x)$ для $x \in I$, необхідно визначити

$$\varphi'(-1) = \lim_{x \to -1+0} \varphi'(x), \quad \varphi'(1) = \lim_{x \to +1-0} \varphi'(x).$$

Нам залишилося тільки дослідити питання існування цих границь.

Оскільки функція $\Psi(x) \equiv \varphi'(x)$ неперервна при $x \in (-1,1)$, то виконується одна з умов

$$a) \lim_{x \to 1-0} \varphi'(x) = \infty, \quad b) \lim_{x \to 1-0} \varphi'(x) = A < \infty.$$

Якщо б виконувалась умова a), то функція $\varphi(x)$ не була б обмеженою в I.

Тому має місце випадок b). Аналогічно отримаємо, що існує

$$\lim_{x \to -1+0} \varphi'(x) = B < \infty.$$

Після цього ми зможемо легко знайти ці границі, а сам

$$\lim_{x \to 1-0} \varphi'^2(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{4\left(1-x^2\right)p^2(x)}{a^2 - \varphi^2(x)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{-8xp^2(x)}{-2\varphi(x)\varphi'(x)}.$$

Звідки отримаємо

$$\lim_{x \to 1-0} \varphi'^2(x) = \frac{4p^2(1)}{\varphi(1)} \equiv \frac{4p^2(1)}{a} = \varphi'^2(1).$$

Остаточно

$$\varphi'(1) = \left(\frac{4p^2(1)}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогічно отримаємо

$$\varphi'(-1) = \left(\frac{4p^2(-1)}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \varphi'(1).$$

Сформулюємо у вигляді загальної теореми отримані результати.

Теорема. Нехай:

1) $p(x) > 0 \in C[I]$ і парна для $x \in I$;

2) $a^2 = \frac{8}{\pi}\int\limits_0^1 \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} p(x)dx$.

Тоді рівняння $F(x,\varphi) = 0$ (див. (4)) визначає неявну функцію $\varphi(x)$ на проміжку I , яка:

а) є розв'язком задачі (1);

б) існує неперервна похідна $\varphi'(x) > 0$ для всіх $x \in I$;

в) $\varphi(-1) = -\varphi(1)$;

г) $\varphi'(-1) = \varphi'(1) = \left(\frac{4p^2(-1)}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$;

д) розв'язок $\varphi(x)$ є непарною функцією.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
3. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. – 1952. – Т. 27, вып. 6(52). – С. 3–96.
4. Langer R.E. The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 90 – P. 113–142.
5. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. V. 226. – P. 227–241.
6. Бобочко В.М., Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. – Київ: Наукова думка. 2002. – 310 с.
7. Бобочко В.Н. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота // Дифференц. ур.-ия. – 1991. – Т. 27, 9. – С. 1505–1515.
8. Бобочко В.М. Точка звороту в системі диференціальних рівнянь з аналітичним оператором // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, 2. – С. 147–160.
9. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, 10. – С. 1304–1312.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 25 березня 2006 р.